Rozmnażajmy się, bo inaczej któż utrzyma naszych emerytów?

Stefan Sokołowski

Gdańsk, 11 grudnia 1996

Gdyby było mniej ludzi, świat byłby piękniejszy i zdrowszy. Z drugiej strony, jak słyszałem, Polsce grozi niż demograficzny, społeczeństwo się, panie, starzeje i na każdego pracującego będzie przypadać coraz większa ilość niepracujących emerytów do utrzymania. Żeby temu zaradzić, państwo powinno, proszę państwa, prowadzić politykę prorodzinną, to znaczy używać pieniędzy podatników do zwiększenia tempa namnażania Polaków.

Powinniśmy zmniejszyć przyrost naturalny w celu ochrony resztek środowiska. Jednocześnie powinniśmy go zwiększyć w celu poprawienia stosunku ilości młodych pracujących do ilości starych niepracujących. Czy to się da pogodzić? Przedstawiam poniżej pewne proste wyliczenia świadczące o tym, że w ogóle nie ma czego godzić. Stosowany często argument o kosztownym utrzymaniu staruszków przy słabym tempie rozmnażania okazuje się bałamutny w prawie każdych okolicznościach. Wysoki przyrost naturalny jest kosztownym luksusem, a jego zmniejszenie *poprawia* stosunek ilości pracujących do niepracujących.

A teraz ostrzegam: nie jestem demografem i mogę niepoprawnie stosować obowiązującą terminologię a także nie chwytać jakichś prawidłowości demograficznych. Bardzo proszę fachowców o wyrozumiałość a także o wyjaśnienie, czy i gdzie poniższe obliczenia zawierają błąd.

Zanim zagłębimy się w straszną matematykę, zastanówmy się *na oko*, kogo właściwie musi utrzymywać każdy młody pracujący. Do grona tych „darmozjadów” należy wliczyć

- emerytów, czyli osoby powyżej (w przybliżeniu) 60-ego roku życia, oraz
- dzieci, czyli osoby poniżej ($\pi\times$drzwi) 20-ego roku życia.

Nie trzeba wielkiej wiedzy demograficznej, żeby zdać sobie sprawę, że emerytów jest mniej niż dzieci, a więc to dzieci a nie starcy stanowią główne obciążenie ekonomiczne dla osób pracujących[1].

Dla wyliczeń załóżmy, że maksymalna długość ludzkiego życia wynosi M i że ludzie umierają tym szybciej im są starsi. Z braku czegoś lepszego przyjąłem $\sqrt{1-\frac{t}{M}}$ jako „funkcję wymierania”:

[1] W Polsce w r. 1994 w wieku *przed*produkcyjnym było 28.1% społeczeństwa, w wieku produkcyjnym 58.4% a w wieku *po*produkcyjnym 13.5%. Tak piszą w Roczniku Statystycznym GUSu za r. 1995, Warszawa 1995. Proszą, żeby podawać źródło, więc to czynię. Ostrzegam, że oni nieco inaczej określają granice wieku produkcyjnego.

Na osi poziomej zaznaczamy wiek osoby a wykres pokazuje, jaka część populacji dożywa tego wieku. A więc wieku 0 dożywają wszyscy, wieku M nikt, a np. wieku $\frac{3 \cdot M}{4}$ dożywa połowa populacji.

Załóżmy też następujący uproszczony model rozrodczości: każdy, kto dożyje do wieku W (zakładamy, że $0 < W < M$), wydaje na świat D dzieci. Dla celów tego artykułu możemy zaniedbać fakt, że ludzie rozmnażają się parami a nie w pojedynkę, że robią to w różnym wieku i że ilość dzieci nie jest dla wszystkich równa: liczymy na wartościach średnich.

Wreszcie załóżmy, że wiek produkcyjny obejmuje dwie środkowe ćwiartki życia ludzkiego, t.zn. człowiek jest nieprodukcyjny w wieku między 0 a $\frac{M}{4}$, następnie jest produkcyjny w wieku między $\frac{M}{4}$ a $\frac{3 \cdot M}{4}$, a potem jest do końca życia nieprodukcyjny. Np. jeśli $M = 80$ lat (zaniedbujemy te kilka osób, którym udało się pożyć dłużej), to wiek produkcyjny zaczyna się w wieku 20 lat a kończy w wieku 60 lat.

Jeszcze jedno upraszczające założenie sformułuję w dodatku na końcu artykułu, w którym znajduje się wyprowadzenie następującego wzoru na funkcję $G(t, r)$ podającą, ile osób w społeczeństwie jest w jakim wieku:

$$G(t, r) = \left(\sqrt{1 - \frac{t}{M}}\right) \cdot e^{\alpha \cdot (r-t)} \cdot G(0, 0)$$

$G(t, r)$ jest ilością osób, które w roku r mają t lat; α jest tempem przyrostu naturalnego.

Przyjrzyjmy się bliżej temu wzorowi. Przedstawia on iloczyn przyjętej funkcji wymierania przez funkcję wykładniczą. Jak wiadomo, funkcja wykładnicza jest granicznym przypadkiem postępu geometrycznego, który rządzi procesami wzrostu[2]. Jeśli α jest dodatnie, to z każdym rokiem osób w danym wieku jest więcej i wzrost jest wykładniczy (r czyli rok jest o wiele większe od t czyli wieku osób, więc $r - t > 0$). Jeśli α jest ujemne, to ilość osób spada i spadek jest wykładniczy.

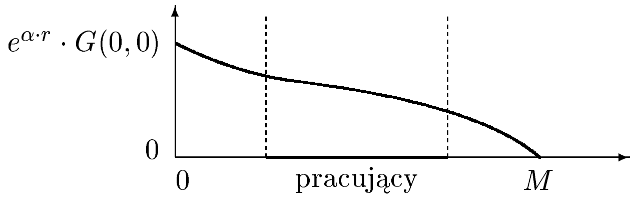
Wykres funkcji G względem t powinien przypominać „piramidki" demograficzne obrazujące ilość ludzi w różnym wieku w społeczeństwie. Od prawdziwych piramidek będzie się różnił pewną idealizacją założeń: nie odróżniamy kobiet od mężczyzn, zakładamy niezmienność tempa rozmnażania, itp. Ale odchylenia rzeczywistości od tego modelu nie powinny być na tyle duże, żeby prowadzić do zasadniczo innych wniosków. Będę te piramidki rysował przewrócone: na osi poziomej zaznaczam wiek ludzi; na pionowej — ilość ludzi w danym wieku. Interesuje nas kształt wykresu funkcji G w zależności od parametru α odpowiedzialnego za wielkość przyrostu naturalnego.

Zbadanie przebiegu funkcji $G(t, r)$ względem t (przy ustalonym r) nie powinno być trudne dla czytelnika, który choćby otarł się o rachunek różniczkowy. Okazuje się, że kształt wykresu zależy od wielkości współczynnika α w sposób, który opisuję poniżej.

Przy dużych α (dokładniej: gdy

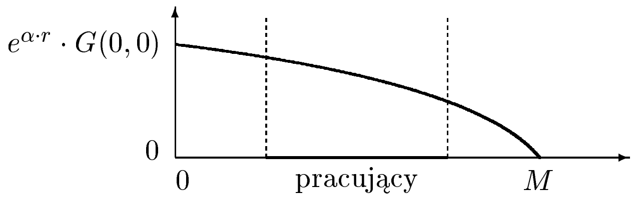
[2]Purystom należałoby się wyjaśnienie, jaką granicę mam na myśli. Zamiast skomplikowanego wywodu oferuję następujący przykład z życia. Jeśli mamy jakieś pieniądze na rachunku bankowym ze stałym oprocentowaniem α, to opłaca nam się w środku roku wypłacić cały kapitał razem z już narosłym oprocentowaniem (zlikwidować konto) i natychmiast wpłacić je na takie samo konto. Wtedy przez drugą połowę roku uzyskany procent będzie też procentował. Wymusimy w ten sposób szybszą „kapitalizację odsetek". Jeszcze bardziej opłaca nam się wykonać taką operację trzykrotnie w ciągu roku, albo nawet czterokrotnie, albo.... Gdy maksymalny czas między takimi operacjami dąży do zera, to funkcja wzrostu naszego kapitału w zależności od czasu r coraz bardziej przypomina funkcję wykładniczą $e^{\alpha \cdot r}$. Wzrostem populacji rządzą takie same prawa, ale przyroda nie zna utrudnień stosowanych przez banki, takich jak kary za zerwanie terminu czy dwutygodniowy termin oczekiwania na pieniądze przy likwidacji konta.

$\alpha > \frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot M}$ [3]) kształt wykresu funkcji G dla ustalonego r jest następujący:



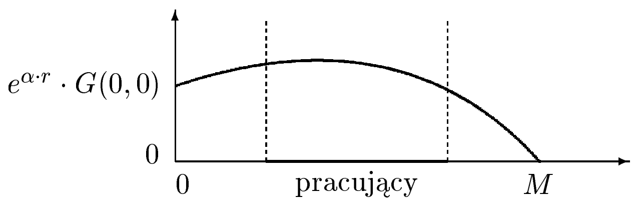
W miarę wzrostu α punkt przegięcia będzie się przesuwał coraz dalej w prawo, czyli lewa część wykresu będzie coraz bardziej zadarta w górę. Wobec tego stosunek ilości pracujących (pole ograniczone od góry wykresem a z boków przerywanymi liniami) do całej populacji (pole pod wykresem) będzie się pogarszał. W takim społeczeństwie każdy z nas ma wielkie rodzeństwo i otrzymuje dla siebie niewielki ułamek troski zapracowanych rodziców. W późniejszym wieku każdy ma mnóstwo dzieci i musi się na nie zapracowywać.

Przy malejącym α punkt przegięcia powędruje w lewo, aż zupełnie wyjdzie poza wykres. Dla $-\frac{1}{2\cdot M} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot M}$ [4] punktów przegięcia już nie będzie:



Jak widać, stosunek liczby pracujących do niepracujących jest teraz lepszy. W szczególności dla $\alpha = 0$ wykres jest stacjonarny: w następnych latach (dla większych r) będzie taki sam.

No to zbadajmy sytuację przy rozrodczości jeszcze silniej ujemnej. Przy $\alpha < -\frac{1}{2\cdot M}$ na krzywej pojawia się maksimum:



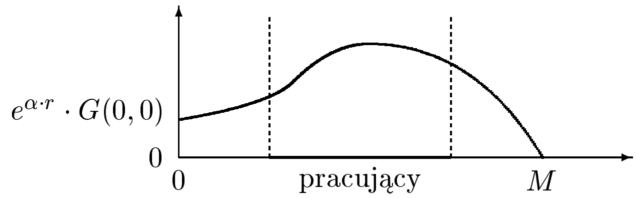
Ależ nam przy tym wzrosła środkowa produkcyjna strefa w stosunku do niepracujących boków, prawda? Z upływem czasu krzywa będzie przebiegała coraz bliżej poziomej osi. Jest to społeczność wymierająca: pokolenie dzieci jest mniej liczne niż pokolenie ich rodziców a zanim osiągnie dorosłość, jeszcze się przerzedzi. Jak widać z wykresu, to wymieranie odbywa się w ekonomicznej obfitości spowodowanej stosunkowo dużą liczbą pracujących. Wszyscy jesteśmy jedynakami, rodzice utrzymują nas bez trudu i jeszcze mają „rezerwę mocy” na jakieś inne sprawy dobre lub złe.

Jeśli rozrodczość jeszcze spadnie, pojawi się kolejny punkt przegięcia. Oto wy-

[3] Dla przykładowego $M = 80$ lat oznacza to $\alpha > 0.26\%/\mathrm{rok}$. Wg Rocznika Statystycznego przyrost naturalny w r. 1994 miał właśnie tą graniczną wartość 0.26%/rok. Zwracam uwagę, że jesteśmy akurat na dnie niżu demograficznego.

[4] Dla przykładowego $M = 80$ lat oznacza to $-0.62\%/\mathrm{rok} \leqslant \alpha \leqslant 0.26\%/\mathrm{rok}$.

kres dla $\alpha < -\frac{\sqrt{2}+1}{2\cdot M}$ [5]:



To społeczeństwo tak słabo się rozmnaża, że właściwie wymiera na potęgę, a ciągle jeszcze nie widać zapowiadanego dramatycznego obciążenia osób pracujących utrzymaniem staruszków. Przeciwnie, obciążenie pracujących jest mniejsze niż kiedykolwiek. Zapewne dają się już zauważyć inne niedogodności; np. smutno się żyje, gdy wokół prawie nie ma ładnych młodych dziewczyn a są same dojrzałe matrony w wieku produkcyjnym. Smutno, ale jak dostatnio!

Jeśli dalej będziemy zmniejszać α, to w końcu nadejdzie klęska, którą nas straszą. Maksimum wykresu będzie się przesuwało coraz bardziej w prawo i w końcu wejdzie w strefę emerytów. Stanie się to na krótko przed ostatecznym wymarciem całej społeczności. Społeczeństwo, które do tego dopuściło, miało zapewne jakieś bardzo poważne problemy, wobec których ilość staruszków na jednego pracującego nie była najważniejszym.

No to teraz wiemy już, czego mamy się obawiać: jeśli rozrodczość spadnie o wiele poniżej -1.5%/rok i ustabilizuje się na tak niskim poziomie na najbliższe 60 lat, to osobom pracującym będzie trudno utrzymać niepracujących staruszków. Póki co przyrost naturalny w Polsce wynosi $+0.26\%$/rok i nigdy nie był ujemny[6] i dlatego zaharowujemy się na utrzymanie tabunów naszych milusińskich a przy tym musimy wyrzynać naturę w pień, żeby zrobić dla nich miejsce.

Skąd więc bierze się powszechne przekonanie o negatywnych ekonomicznych efektach niskiego przyrostu naturalnego? Jak już wcześniej zaznaczałem, nie jestem demografem. Muszę teraz dodać, że specjalistą od psychologii społecznej również nie jestem. Poniższy wywód jest więc po prostu taką sobie próbą wyjaśnienia.

Jesteśmy tak skonstruowani, że wolimy inwestować w dzieci niż spłacać dług wdzięczności w stosunku do rodziców. Dlatego utrzymywanie własnego potomstwa uważamy za rzecz naturalną a konieczność płacenia na czyichś emerytów za dotkliwość. W krajach rozwiniętych różnica między tymi dwoma rodzajami wydatków podkreślona jest dodatkowo przez styl życia. Otóż w tych krajach dziadkowie na ogół mieszkają osobno, a więc wydatki na ich utrzymanie są *zewnętrzne* w stosunku do danego gospodarstwa domowego. Albo muszę im wysłać moje ciężko zarobione pieniądze zubożając moją rodzinę, albo (jeszcze gorzej) zabiera mi te pieniądze fiskus. W przeciwieństwie do tego własne dzieci „nie kosztują": po prostu prowadzę swój dom na wyższej stopie i ponoszę związane z tym wydatki.

Oczywiście jest to złudzenie. Z czysto ekonomicznego punktu widzenia i jedni i drudzy nas kosztują. Jeśli nie zajmować się wartościami emocjonalnymi łączącymi się z posiadaniem dzieci, ani geopolityką („w trzecim świecie się mnożą, to i my musimy, bo nas czapkami nakryją"), ani innymi takimi, to okazuje się, że stosunek ilości osób pracujących do niepracujących

[5] Dla przykładowego $M = 80$ lat daje to zawrotny przyrost ujemny: $\alpha < -1.5\%$/rok.
[6] Wg Rocznika Statystycznego za 1995.

jest korzystniejszy przy ujemnym przyroście naturalnym. Przynajmniej tak wynika z przedstawionych obliczeń.

Jak już ostrzegałem, powyższy model jest bardzo uproszczony. Granice wieku produkcyjnego, które przyjmowałem za stałe, nasi niestrudzeni prawodawcy mogą zmienić bez ostrzeżenia na najbliższej sesji Sejmu.

Przyrost naturalny nigdy też nie jest stały. Chwilowe jego zakłócenie, takie, jak np. gwałtowny spadek w latach 1939–45, odbija sie dodatkowymi punktami przegięcia wykresu o pokolenie poźniej, o dwa pokolenia później itp.[7]

Również uproszczeniem jest założenie, że ludzie wymierają wg funkcji pierwiastek.

Demografowie mogą obawiać się także nieprzewidzianych przeze mnie efektów rozmaitych niestabilności. Na przykład, co się stanie, gdy z jakichś powodów rozrodczość spadnie gwałtownie a następnie wróci do stanu poprzedniego? Powstały w ten sposób dołek w wykresie krzywej $G(t,r)$ zrazu poprawi stosunek ilości pracujących do niepracujących, ale z czasem (ze wzrostem r) będzie się przesuwał ku rocznikom starszym, po 20 latach wejdzie w strefę produkcyjną i wtedy stosunek powyższy zrobi się bardzo niedobry. Tyle, że ta niedobrość spowodowana będzie nie samym spadkiem przyrostu naturalnego 20 lat wcześniej, a późniejszym wzrostem, czyli wychodzeniem z dołka. Dołki się nie opłacają, co innego trwały spadek przyrostu.

Rzeczywistość jest zawsze bardziej skomplikowana niż modele rachunkowe, ale modele pomagają odróżnić zjawiska nieuchronne od chwilowych i przypadkowych. Z modelu przedstawionego powyżej wynika, że wprawdzie spadek przyrostu naturalnego może zwiększyć ilość emerytów, których musi utrzymać każdy pracujący, ale to pogorszenie jest więcej niż kompensowane zmniejszeniem ilości dzieci, które również musi on utrzymać. Nie ma powodów do narzekania na grożący nam ekonomiczny stress w wyniku mniejszego tempa rozmnażania. Przeciwnie, gdyby było ono lekko ujemne, to zarówno ekonomicznie jak i ekologicznie wiodłoby się nam lepiej.

A morał z całej opowieści jest następujący: idźcie i się rozmnażajcie, ale nie przesadzajcie.

Wyprowadzenie wzoru na rozkład wieku w społeczeństwie

Niech $G(t,r)$ oznacza ilość osób, które w roku r są w wieku t; dla purystów: jest to funkcja gęstości ilości ludzi w zależności od wieku, a więc w roku r liczba osób w wieku pomiędzy t_0 a t_1 wynosi

$$\int_{t_0}^{t_1} G(t,r)\,dt$$

Trzeba wyznaczyć przebieg funkcji G, bo mówi ona, ile osób jest kiedy w jakim wieku.

Ponieważ w roku r osób w wieku rozrodczym jest $G(W,r)$, więc ilość rodzących się dzieci, czyli $G(0,r)$, jest $D \cdot G(W,r)$; stąd pierwszy wzór na funkcję G:

$$G(0,r) = D \cdot G(W,r) \tag{1}$$

[7] W moim modelu, w którym W jest stałe i równe dla wszystkich ludzi, echa takiego jednorazowego zakłócenia nigdy nie wygasną.

Z drugiej strony w wieku t jest tyle osób, ile urodziło się t lat temu z poprawką na tych, co nie doczekali:

$$G(t,r) = \left(\sqrt{1-\frac{t}{M}}\right) \cdot G(0, r-t) \tag{2}$$

Teraz jesteśmy już w stanie porachować, ilu ludzi rodziło się w poszczególnych pokoleniach:

$$\begin{array}{lll}
G(0,r) & = & \text{(na podstawie (1))} \\
= & D \cdot G(W,r) \quad = & \text{(na podstawie (2))} \\
= & D \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right) \cdot G(0, r-W) \quad = & \text{(na podstawie (1))} \\
= & D^2 \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right) \cdot G(W, r-W) \quad = & \text{(na podstawie (2))} \\
= & D^2 \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right)^2 \cdot G(0, r-2\cdot W) \quad = & \\
\ldots & & \\
= & D^k \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right)^k \cdot G(0, r-k\cdot W) &
\end{array}$$

i tak jest dla dowolnego naturalnego k. Przyjmijmy teraz dodatkowe upraszczające założenie, że od początku świata (dokładniej: od roku 0) upłynęła całkowita liczba pokoleń, a więc $r = k \cdot W$ dla pewnego naturalnego k; inaczej:

$$k = \frac{r}{W}$$

Tą równość wstawiamy do wzoru na ilość ludzi rodzących się w poszczególnych pokoleniach:

$$\begin{array}{ll}
G(0,r) & = \\
= & D^{\frac{r}{W}} \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right)^{\frac{r}{W}} \cdot G(0, r-\frac{r}{W}\cdot W) \quad = \\
= & D^{\frac{r}{W}} \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right)^{\frac{r}{W}} \cdot G(0,0)
\end{array}$$

Ostatecznie ze wzoru (2) wynika ilość ludzi w dowolnym wieku w dowolnym roku:

$$G(t,r) = \left(\sqrt{1-\frac{t}{M}}\right) \cdot D^{\frac{r-t}{W}} \cdot \left(\sqrt{1-\frac{W}{M}}\right)^{\frac{r-t}{W}} \cdot G(0,0)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\alpha = \ln \sqrt[2\cdot W]{D^2 \cdot \left(1-\frac{W}{M}\right)}$$

(ln — logarytm naturalny) można ilość ludności prościej wyrazić przez

$$G(t,r) = \left(\sqrt{1-\frac{t}{M}}\right) \cdot e^{\alpha\cdot(r-t)} \cdot G(0,0)$$

Ponieważ $W < M$, więc pierwiastek pod logarytmem jest dodatni a więc α jest zawsze dobrze określone. Współczynnik ten odpowiada tempu przyrostu naturalnego w społeczności. Jak widać α wzrasta ze wzrostem D, czyli ilości dzieci na każdego rodzica; a maleje ze wzrostem W, czyli wieku rozrodczego, bo wtedy mniej osób dożywa do wydania potomstwa.