Jak się skracają bliźniaki

czyli proste wyprowadzenia wzorów szczególnej teorii względności

Stefan Sokołowski

Gdańsk, 29 marca 1998

Poniżej wyprowadzam w sposób naiwny i całkowicie geometryczny wzory na relatywistyczną „dylatację” czasu pomiędzy dwoma obserwatorami oraz omawiam paradoks bliźniąt. Dalej omawiam kwestię jednoczesności, relatywistycznego skrócenia długości oraz dodawanie prędkości. Na końcu zajmuję się odległością czasoprzestrzenną i ruchami inercjalnymi. Nie umiem wyprowadzić należącego również do szczególnej teorii względności wzoru na wzrastanie mas wraz z prędkością; nie sądzę, żeby to było trudne, po prostu nie pamiętam, jak szło.

Na wszelkie czysto geometryczne rozważania fizyk powinien patrzeć *cum grano salis.* Ściśle biorąc tak wyprowadzone wzory stanowią tylko niesprzeczną teorię matematyczną, jedną z wielu. W jakim stopniu jest ona adekwantna do świata istniejącego, to już jest pytanie filozoficzne, a może fizyczne, w każdym razie niemożliwe do zweryfikowania rozważaniami geometrycznymi. W zgodzie z panującymi współcześnie poglądami fizyków należałoby stwierdzić, że szczególna teoria względności nie opisuje świata, bo zajmuje się wyłącznie ruchami inercjalnymi. W „płaskiej” czasoprzestrzeni, o której tu jest mowa, w ogóle nie ma miejsca na ruchy nieinercjalne (por. końcówka rozdz. 6, str. 10). Najdalszy zasięg, na który ta abstrakcja daje się jeszcze naciągnąć, to ruchy „kawałkami inercjalne”, takie jak u bliźniaka-podróżnika (patrz rozdz. 2). Prawdziwa czasoprzestrzeń nie jest płaska, więc jej badanie jest już domeną ogólnej teorii względności. Płaską szczególną teorię względności można uważać za pojęciowe narzędzie do badania zakrzywionej czasoprzestrzeni w tym samym sensie, w jakim bada się powyginane powierzchnie płaszczyznami stycznymi.

Z następujących założeń będę korzystał:

1. Prędkość światła jest dla każdego obserwatora równa i zawsze wynosi 1. To znaczy, że przyjąłem jednostkę długości związaną ze światłem; np. czas mierzę w latach a odległości w latach świetlnych. Wszelkie inne prędkości są mniejsze od 1.

2. Dla obserwatorów inercjalnych czas między dwoma zdarzeniami może być różny. Dokładniej: jeśli jeden z obserwatorów zmierzył czas t i odległość 0 (a więc dla niego zdarzenia te odbyły się w tym samym miejscu), to drugiemu wyjdzie czas $f_v \cdot t$, gdzie f_v jest pewnym mnożnikiem zależnym wyłącznie od prędkości v jednego obserwatora względem drugiego. Dokładną wartość f_v mam dopiero wyznaczyć.

3. Dla obserwatorów inercjalnych jednoczesność zdarzeń może nie być tym samym. Dokładniej: jeśli jeden z obserwatorów zmierzył odległość x i czas 0 (a więc dla niego zdarzenia te odbyły się jednocześnie), to drugiemu wyjdzie pewien czas $g_{v,x}$ między tymi samymi wydarzeniami, gdzie x jest odległością

przestrzenną zdarzeń a v prędkością jednego obserwatora względem drugiego. Dokładną wartość $g_{v,x}$ mam dopiero wyznaczyć.

4. Dla obserwatorów inercjalnych odległość między dwoma zdarzeniami może być różna. Dokładniej: jeśli jeden z obserwatorów zmierzył odległość x i czas 0 (a więc dla niego zdarzenia te odbyły się jednocześnie), to drugiemu wyjdzie odległość $h_v \cdot x$, gdzie h_v jest pewnym mnożnikiem zależnym wyłącznie od prędkości v jednego obserwatora względem drugiego. Dokładną wartość h_v mam dopiero wyznaczyć.

5. Zakładam też „płaskość” czasoprzestrzeni, tzn. zakładam, że wszystko jest niezmiennicze ze względu na wybór początku układu współrzędnych gdziekolwiek w czasoprzestrzeni.

6. Jedno dodatkowe założenie zostanie sformułowane w rozdz. 6 na str. 9.

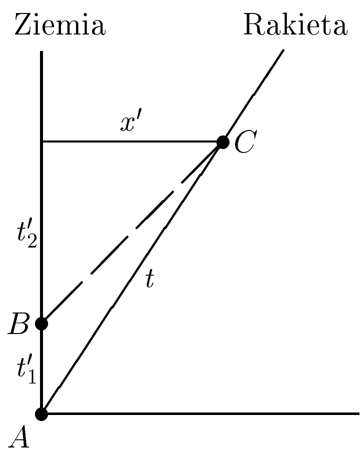
1 Wzór na przeliczanie czasu

Wyobraźmy sobie następujący ciąg zdarzeń:

A: z Ziemi wystartowała Rakieta z prędkością v.

B: ziemski obserwator odczekał t'_1 czasu a następnie wysłał w kierunku Rakiety promień światła.

C: po upływie czasu t'_2 ten promień światła dotarł do Rakiety.



Rysunek obok przedstawia całą zabawę z punktu widzenia Ziemi. Na osi pionowej zaznaczam czas upływający na Ziemi; na poziomej wzrastającą odległość między Ziemią a Rakietą. Linią przerywaną oznaczyłem promień światła; ponieważ porusza się on z prędkością 1, na rysunku kąt jego nachylenia do osi pionowej wynosi 45°. Rakieta leci wolniej, więc jej kąt jest mniejszy. Zakładam, że dla obserwatora w Rakiecie między zdarzeniami A i C upłynął czas t; muszę wyznaczyć odpowiedni czas

$$t' = t'_1 + t'_2$$

między tymi samymi zdarzeniami A i C dla obserwatora na Ziemi.

No to porachujmy:

$$t' = t'_1 + t'_2 = \quad (\text{ponieważ } t'_2 = x' = v \cdot t') \quad = t'_1 + v \cdot t'$$

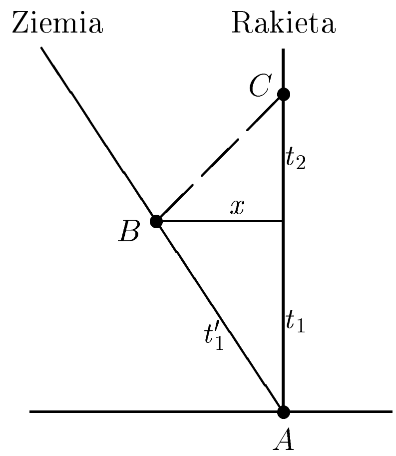
a więc

$$t'_1 = t' \cdot (1 - v) \tag{1}$$

Z drugiej strony

$$t' = f_v \cdot t \tag{2}$$

A teraz popatrzmy na to z punktu widzenia Rakiety:
Teraz Rakieta stoi w miejscu a Ziemia porusza się z prędkością v w przeciwną stronę. Przy tym



$$\begin{aligned} t = {} & t_1 + t_2 = && (\text{ponieważ } t_2 = x = v \cdot t_1) \\ = {} & t_1 + v \cdot t_1 = \\ = {} & t_1 \cdot (1+v) \end{aligned}$$

a więc

$$t = t_1 \cdot (1+v) \tag{3}$$

Z drugiej strony

$$t_1 = f_v \cdot t_1' \tag{4}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} t' = {} & && (\text{z } (2)) \\ = {} & f_v \cdot t = && (\text{z } (3)) \\ = {} & f_v \cdot t_1 \cdot (1+v) = && (\text{z } (4)) \\ = {} & f_v^2 \cdot t_1' \cdot (1+v) = && (\text{z } (1)) \\ = {} & f_v^2 \cdot t' \cdot (1-v) \cdot (1+v) = \\ = {} & f_v^2 \cdot (1-v^2) \cdot t' \end{aligned}$$

a więc

$$f_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

czyli

$$\boxed{t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}}} \tag{5}$$

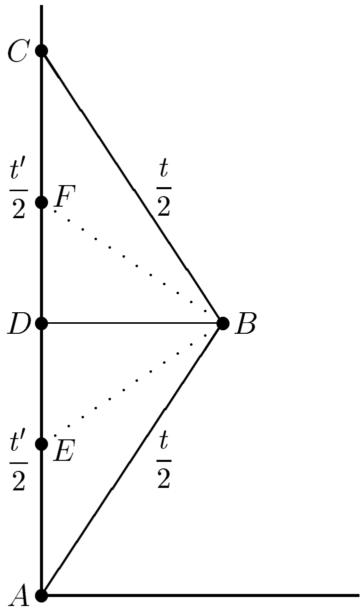
To jest wzór na tzw. *dylatację czasu*: czas w lecącej Rakiecie płynie wolniej niż na nieruchomej Ziemi (bo $0 \leqslant v < 1$ więc $0 < \sqrt{1-v^2} \leqslant 1$, więc $t' > t$). Oczywiście od umieszczenia obserwatora zależy, co według niego leci a co jest nieruchome. Obserwator w Rakiecie będzie uważał, że to on jest nieruchomy a czas na Ziemi płynie wolniej. Obserwatorzy ziemski i rakietowy będą mieli różne zdania na ten temat i żadnej możliwości rozstrzygnięcia kontrowersji. Po prostu prędkość upływu czasu jest zależna od obserwatora.

Żeby nie popaść w paradoksy należy dokładnie zdawać sobie sprawę o jakie czasy chodzi we wzorze (5). Otóż t oznacza czas między dwoma zdarzeniami dla takiego obserwatora, dla którego zdarzyły się one w tym samym miejscu — to jest bardzo istotne. Natomiast t' oznacza czas między tymi samymi zdarzeniami dla obserwatora, który wzgl. tamtego porusza się z prędkością v.

Wyprowadzenie wzoru na dylatację czasu korzysta, formalnie biorąc, ze specjalnych własności światła. Jednak nie ma to nic wspólnego ani z fotonami ani z elektromagnetyzmem. Z punktu widzenia geometrii istotne jest tylko, że *coś* potrafi się poruszać ruchem jednostajnym z prędkością 1 i że to coś spełnia założenie 1 ze str. 1.

2 Bliźnięta

Wykonajmy ponownie podobne obliczenie, tyle że teraz Rakieta oddala się od Ziemi przez czas $t/2$ (liczony przez bliźniaka-podróżnika) a następnie cudownie zawraca w miejscu i wraca przez czas $t/2$. Ile czasu zmierzy wtedy na Ziemi bliźniak-domator? Poniższy rysunek przedstawia punkt widzenia Ziemi:



A więc

$$\frac{t'}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1-v^2}}$$

czyli

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}}$$

Na przykład jeśli Rakieta leciała z prędkością $3/4$ a bliźniakowi-podróżnikowi minął jeden rok, to w tym czasie na Ziemi minęło

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \simeq 1.51$$

lat.

Nie korzystałem z żadnych przyspieszeń, prawda?

Częściowa prawda. Istnieje asymetria między obydwoma bliźniakami biorąca się z faktu, że ten w Rakiecie nie porusza się w sposób inercjalny.

Cienka linia DB na rysunku łączy ze sobą zdarzenia jednoczesne z punktu widzenia Ziemi: bliźniak-domator będzie uważał, że jest w punkcie D dokładnie wtedy, gdy Rakieta jest w B. W dodatku znając zasadę dylatacji czau będzie uważał, że w Rakiecie czas płynie wolniej, a więc że zegar w Rakiecie mniej przeszedł w drodze z A do B niż jego zegar z A do D. W drugiej części drogi sytuacja jest taka sama, więc bliźniak-domator oczekuje, że po wylądowaniu zegar Rakiety wskaże czas wcześniejszy niż zegar Ziemi.

Inaczej widzi jednoczesność bliźniak-podróżnik. Kiedy on dojeżdża do punktu B, to jednocześnie (z jego punktu widzenia) bliźniak-domator na Ziemi dochodzi zaledwie do E. Linia kropkowana EB łączy zdarzenia jednoczesne z punktu widzenia Rakiety w jej ruchu oddalającym się od Ziemi. Zgodnie z zasadą dylatacji czasu bliźniak-podróżnik uważa, że zegary na Ziemi wykazały mniejszy upływ czasu między A i E niż jego rakietowy chronometr między A i B.

I wtedy nagle Rakieta zawraca w punkcie B, co powoduje zmianę pojęcia jednoczesności dla bliźniaka-podróżnika. Po zawróceniu uważa on już, że jednocześnie z jego zdarzeniem B na Ziemi zachodzi nie E tylko F (górna linia kropkowana)! Znowu zgodnie z dylatacją czasu odcinek FC na Ziemi trwa krócej niż BC w Rakiecie. Ale poza tymi dwoma odcinkami AE i FB, które bliźniak-podróżnik porównywał ze swoim zegarem (i wyszła mu suma mniejsza niż w Rakiecie) na Ziemi minął cały odcinek EF, którego nie mógł wziąć pod uwagę, bo był wtedy zajęty manewrem zawracania.

Linie kropkowane na rysunku oznaczają linie jednoczesności zdarzeń z punktu widzenia Rakiety przed i po zawróceniu. Przy zwiększaniu prędkości Rakiety kąt ostry między tymi liniami a osią AC maleje. Wobec tego punkty E i F zbliżają się coraz bardziej do A i C (odpowiednio). Wobec tego przy zwiększaniu prędkości coraz większy upływ czasu na Ziemi uchodzi uwadze bliźniaka-podróżnika.

A jak duży upływ czasu uchodzi jego uwadze? Zagadnieniem tym zajmuję się dokładniej w rozdz. 3. Po przeczytaniu Czytelnik łatwo wyliczy, że dokładnie tyle, ile brakuje do bilansu. A więc po wzięciu pod uwagę zarówno dylatacji czasu na odcinkach AE i FC jak i czasu, który uciekł w trakcie zawracania, obaj bliźniacy zgodzą się, że bliźniak-podróżnik ma być w momencie spotkania młodszy.

3 Jednoczesność zdarzeń

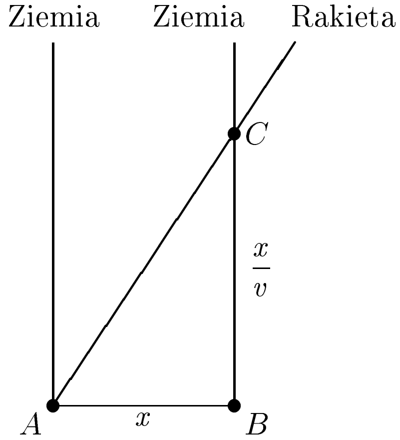
Załóżmy teraz, że na Ziemi wydarzyło się, co następuje:

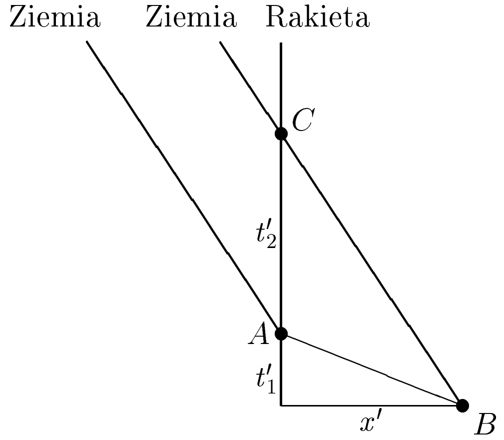
A: z Ziemi wystartowała Rakieta z prędkością v.

B: jednocześnie (z punktu widzenia Ziemi) w miejscu odległym o x i leżącym na torze Rakiety coś wybuchło.

C: Rakieta doleciała do miejsca wybuchu.

Lewy rysunek pokazuje te wydarzenia z punktu widzenia Ziemi, a prawy z punktu widzenia Rakiety:





Mamy wyznaczyć wielkość t'_1 oznaczającą o ile wcześniej nastąpił wybuch niż start Rakiety dla obserwatora z Rakiety; oczywiście nie zakładamy z góry, że t'_1 jest dodatnie.

Zwróćmy uwagę, że $t'_1 + t'_2$ jest czasową odległością między zdarzeniami B i C z punktu widzenia Rakiety. A więc z (5):

$$t'_1 + t'_2 = \frac{x}{v \cdot \sqrt{1 - v^2}}$$

Z drugiej strony x/v jest czasową odległością między zdarzeniami A i C z punktu widzenia Ziemi, bo dla Ziemi wydarzenia A i B są jednoczesne. A więc

$$\frac{x}{v} = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Żeniąc te dwa wzory otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
t_1' = {} & \frac{x}{v \cdot \sqrt{1-v^2}} - t_2' = \\
= {} & \frac{x}{v \cdot \sqrt{1-v^2}} - \frac{x \cdot \sqrt{1-v^2}}{v} = \\
= {} & \frac{x}{v \cdot \sqrt{1-v^2}} \cdot (1-(1-v^2)) = \\
= {} & \frac{x \cdot v}{\sqrt{1-v^2}}
\end{aligned}$$

A więc spośród dwóch zdarzeń jednoczesnych dla Ziemi, obserwator w Rakiecie uzna za wcześniejsze to, które miało miejsce dalej w kierunku ruchu Rakiety; i będzie ono wcześniejsze o

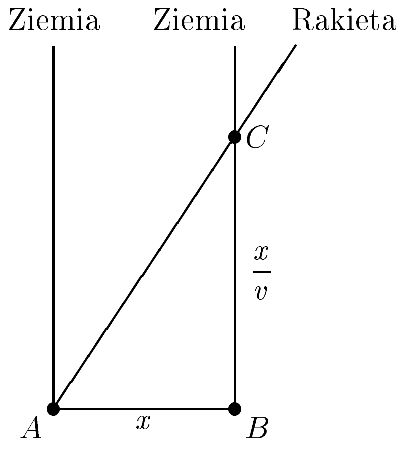
$$\boxed{t_1' = \frac{x \cdot v}{\sqrt{1-v^2}}} \tag{6}$$

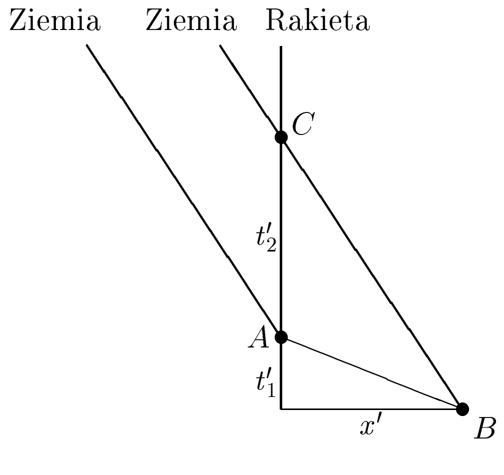
gdzie v jest prędkością Rakiety a x jest mierzoną na Ziemi odległością między tymi zdarzeniami.

Jeśli A i B są zdarzeniami, przy czym A zachodzi w miejscu 0 w chwili 0 a B zachodzi w miejscu x w chwili t i $x > t$, to dla rakiety startującej z A z prędkością t/x zdarzenia A i B są jednoczesne. Niech sobie to wyprowadzi, kto chce. Zatem jednoczesność również zależy od punktu widzenia: jeden obserwator uzna A za wcześniejsze od B, inny B za wcześniejsze od A. Ograniczeniem tej dowolności jest jednak prędkość światła: jeśli dla jakiegoś obserwatora odległość przestrzenna x między zdarzeniami jest *mniejsza* od ich odległości czasowej, to dla wszystkich obserwatorów odległość przestrzenna między tymi zdarzeniami jest mniejsza od ich odległości czasowej. I wszyscy są zgodni, które z nich jest wcześniejsze. A to dlatego, że w takiej sytuacji informacja o zajściu pierwszego zdarzenia poruszająca się z prędkością światła ma już szanse dojść do miejsca, gdzie się wydarzy drugie z nich.

4 Skrócenie odległości

Rozpatrzmy teraz takie same wydarzenia i te same rysunki co w rozdz. 3:





Z punktu widzenia Rakiety (prawy rysunek) Ziemia przebyła odcinek x' między A i B w czasie $t'_1 + t'_2$; czyli

$$(t'_1 + t'_2) \cdot v = x'$$

A więc

$$\begin{aligned} x' &= (t'_1 + t'_2) \cdot v = \\ &= \left(\frac{x \cdot v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x \cdot \sqrt{1-v^2}}{v} \right) \cdot v = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \cdot (v^2 + 1 - v^2) = \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}$$

I to jest własnie wzór na skrócenie długości w kierunku lotu Rakiety:

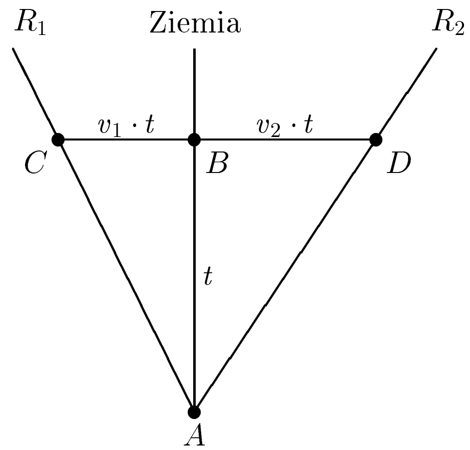
$$\boxed{x' = \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}} \tag{7}$$

Jeśli chcesz możliwie prędko przejechać przez las i dusisz pedał gazu, to i tak nie możesz przyspieszyć ponad prędkość 1. Jednak twoim zyskiem jest relatywistyczne skrócenie odległości między drzewami: zgodnie ze wzorem (7) stoją one coraz bliżej siebie i są bardziej płaskie (skracają się w kierunku jazdy średnice ich pni). Wobec tego cały las staje się mniejszy — pokonujesz większy jego fragment na jednostkę czasu. Ale, uważaj, na jednostkę *twojego* czasu. Obserwator stojący na poboczy uzna, że większość wysiłków twojego silnika poszła w spłaszczenie (skrócenie długości) twojego samochodu i w to, żebyś do celu dojechał młodszy.

5 Dodawanie prędkości

Wyprowadzenie wzoru na dodawanie prędkości wymaga trochę bardziej skomplikowanych rysunków, chociaż rachunkowo jest proste.

Z tego samego miejsca na Ziemi jednocześnie startują dwie rakiety R_1 i R_2 w przeciwne strony z prędkościami odpowiednio v_1 i v_2. Jest to zdarzenie A. W tym samym miejscu Ziemi po czasie t następuje zdarzenie B; oznaczmy przez C i D odpowiednie zdarzenia na obu rakietach jednoczesne z B (z punktu widzenia Ziemi). Chcemy wyrazić prędkość v rakiety R_2 względem rakiety R_1 za pomocą prędkości v_1 i v_2.



Z rakiety R_1 wygląda to następująco (rysunek po prawej):
Ze wzoru (5) na dylatację czasu zastosowanego do odcinka AB widzianego z R_1 mamy:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v_1^2}}$$

Ze wzoru (6) na widziany z R_1 odstęp czasowy między zdarzeniami B i D jednoczesnymi na Ziemi mamy:

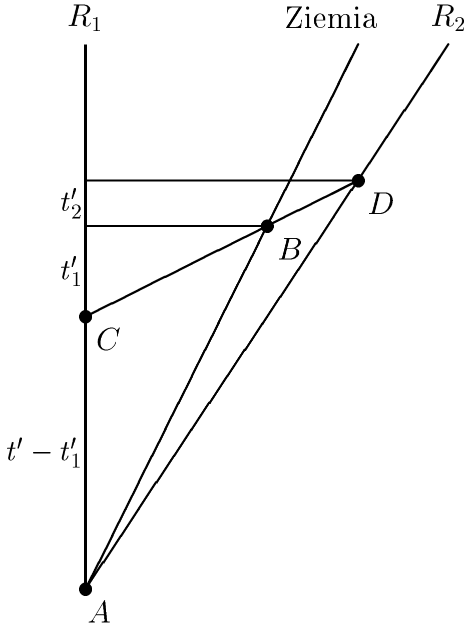
$$t_2' = \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot t}{\sqrt{1-v_1^2}}$$

Wreszcie ze wzoru (7) na relatywistyczne skrócenie odległości między C i D:

$$((t'-t_1') + t_1' + t_2') \cdot v = \frac{v_1 \cdot t + v_2 \cdot t}{\sqrt{1-v_1^2}}$$

Wyliczamy v z ostatniego wzoru wstawiając dwa poprzednie:

$$\begin{aligned} v = & \frac{(v_1+v_2)\cdot t}{\sqrt{1-v_1^2}\cdot(t'+t_2')} = \\ = & \frac{(v_1+v_2)\cdot t}{t + v_1 \cdot v_2 \cdot t} = \\ = & \frac{v_1+v_2}{1+v_1\cdot v_2} \end{aligned}$$



A więc prędkości dodaje się wg wzoru

$$\boxed{v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1\cdot v_2}} \tag{8}$$

6 Odległość czasoprzestrzenna

Przez *odległość czasoprzestrzenną* dwóch zdarzeń A i B rozumiemy wielkość

$$d_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2}$$

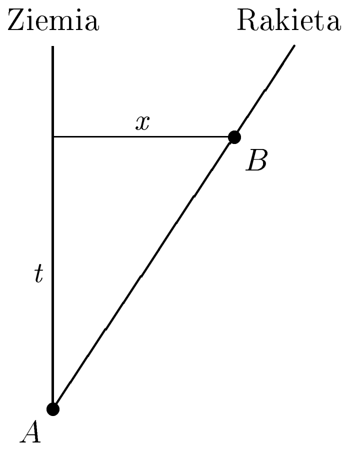
gdzie $\langle x_A, t_A\rangle$ są czasoprzestrzennymi współrzędnymi zdarzenia A a $\langle x_B, t_B\rangle$ są czasoprzestrzennymi współrzędnymi zdarzenia B.

Odległość czasoprzestrzenna dwóch zdarzeń nie zależy od tego, jaki obserwator mierzył wielkości x_A, t_A, x_B i t_B. Uzasadnienie tej niezmienniczości dla przypadku, gdy

$\langle x_A, t_A\rangle = \langle 0, 0\rangle$ i $\langle x_B, t_B\rangle = \langle x, t\rangle$ znajduje się poniżej. Poprawność uogólnienia na dowolne zdarzenia A i B wynika z postulatu 5 na str. 2.

Przypadek gdy $t > x$:

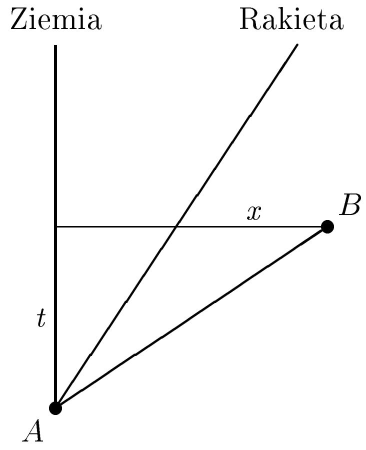
Wtedy dla Rakiety lecącej z punktu A z prędkością x/t, a więc przelatującej przez B, odległość przestrzenna między A i B wynosi 0 a odległość czasowa wynosi $t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}$. Wobec tego



$$\begin{aligned} {d'_{AB}}^2 &= \left(t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}\right)^2 - 0 = \\ &= t^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right) = \\ &= t^2 - x^2 = \\ &= d^2_{AB} \end{aligned}$$

Przypadek gdy $t < x$:

Wtedy dla Rakiety lecącej z punktu A z prędkością t/x wydarzenia A i B są jednoczesne, a ich odległość przestrzenna wynosi $x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{x}\right)^2}$. Wobec tego



$$\begin{aligned} {d'_{AB}}^2 &= 0 - \left(x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{t}{x}\right)^2}\right)^2 = \\ &= -x^2 \cdot \left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right) = \\ &= -x^2 + t^2 = \\ &= d^2_{AB} \end{aligned}$$

Zasada niezmienniczości odległości czasoprzestrzennej d_{AB} jest jedynym wzorem ze szczególnej teorii względności, który naprawdę należy pamiętać. Nie chce mi się wywodzić tu z tej zasady wzorów dotychczas wyprowadzonych, ale zapewniam, że jest to łatwe ćwiczenie. Natomiast z jej pomocą sformułuję dodatkowe założenie dotyczące dopuszczalnych trajektorii w czasoprzestrzeni. Zostało one zapowiedziane we wstępie (zał. 6 na str. 2). Założenie to brzmi następująco:

> Wszelki ruch jest możliwy tylko po trajektoriach, których długość czasoprzestrzenna jest lokalnie maksymalna.

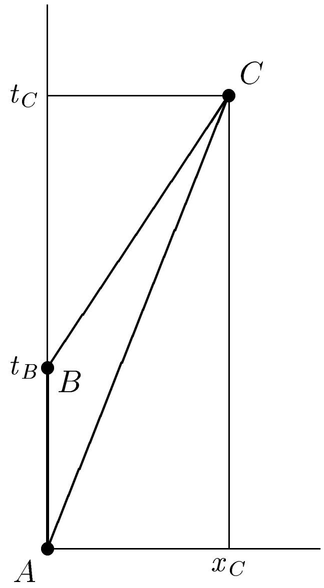
Jeśli jakaś rakieta porusza się w czasoprzestrzeni po łamanej, to możemy policzyć długość czasoprzestrzenną tej łamanej przez sumowanie po jej wszystkich odcinkach odległości czasoprzestrzennych między końcami odcinków. Powyższe założenie mówi, że spośród wszystkich łamanych łączących dwa dane zdarzenia ruch się może odbywać tylko po czasoprzestrzennie najdłuższej.

Ta zasada będzie miała znaczenie w ogólnej teorii względności, gdzie jednak wzór na odległość będzie trochę bardziej skomplikowany (tensor metryczny zakrzywionej przestrzeni) a sumowanie po łamanej zostanie zastąpione całkowaniem po krzywej. W szczególnej teorii względności, czyli w przestrzeni płaskiej, lokalnie najdłuższym torem jest zawsze prosta. Dla uzasadnienia tego stwierdzenia należy tylko pokazać, że jeśli drogę ze zdarzenia A do C przez pośrednie zdarzenie B zastąpimy drogą na skróty z A prosto do C, to czasoprzestrzenna długość ulegnie zwiększeniu.

Żeby to pokazać, przyjmijmy dla uproszczenia, że $\langle x_A, t_A\rangle = \langle 0, 0\rangle$ oraz $x_B = 0$. Zawsze można dobrać takiego obserwatora, dla którego to jest prawda. Mamy sprawdzić czy

$$\sqrt{t_B^2} + \sqrt{(t_C - t_B)^2 - x_C^2} \;\leqslant\; \sqrt{t_C^2 - x_C^2}$$

Załóżmy, że tak nie jest:



$$\sqrt{t_B^2} + \sqrt{(t_C - t_B)^2 - x_C^2} \;>\; \sqrt{t_C^2 - x_C^2}$$

i podnieśmy obie strony tej nierówności do kwadratu:

$$\begin{aligned} &t_B^2 + (t_C - t_B)^2 - x_C^2 + 2 \cdot \sqrt{t_B^2} \cdot \sqrt{(t_C - t_B)^2 - x_C^2} \;> \\ &\quad > \; t_C^2 - x_C^2 \end{aligned}$$

Po uproszczeniach daje nam to:

$$\sqrt{(t_C - t_B)^2 - x_C^2} \;>\; t_C - t_B$$

Po ponownym podniesieniu do kwadratu wychodzi:

$$(t_C - t_B)^2 - x_C^2 \;>\; (t_C - t_B)^2$$

czyli

$$x_C^2 \;<\; 0$$

co jest niemożliwe.

A więc szczególna teoria względności może rozpatrywać tylko ruchy odbywające się w czasoprzestrzeni po prostej, czyli ruchy inercjalne.