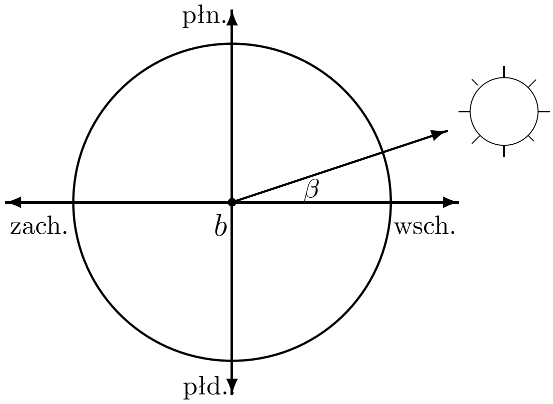
Gdzie wschodzi Słoneczko

Stefan Sokołowski

Gdańsk, 6 XI 2003

Ale o co (ws)chodzi?...



Problem jest taki. Znamy nachylenie α osi ziemskiej do płaszczyzny ekliptyki; oraz szerokość geograficzną φ, pod jaką mieszka obserwator b. Chcemy wiedzieć, w jakim miejscu β horyzontu obserwowanego przez b wstaje Słońce o świcie najdłuższego dnia w roku.

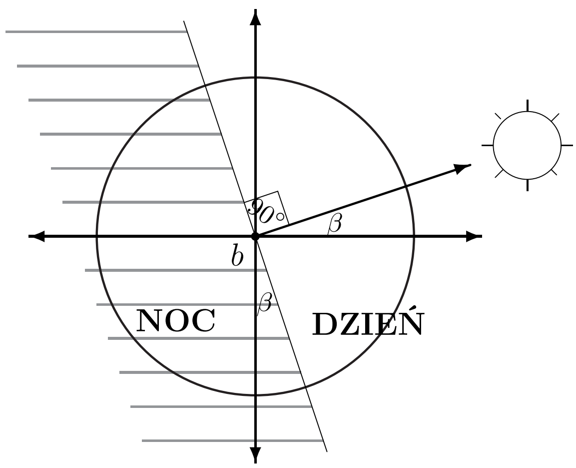
Czyli chodzi o to, żeby znaleźć kąt β lub jakąś jego funkcję trygonometryczną.

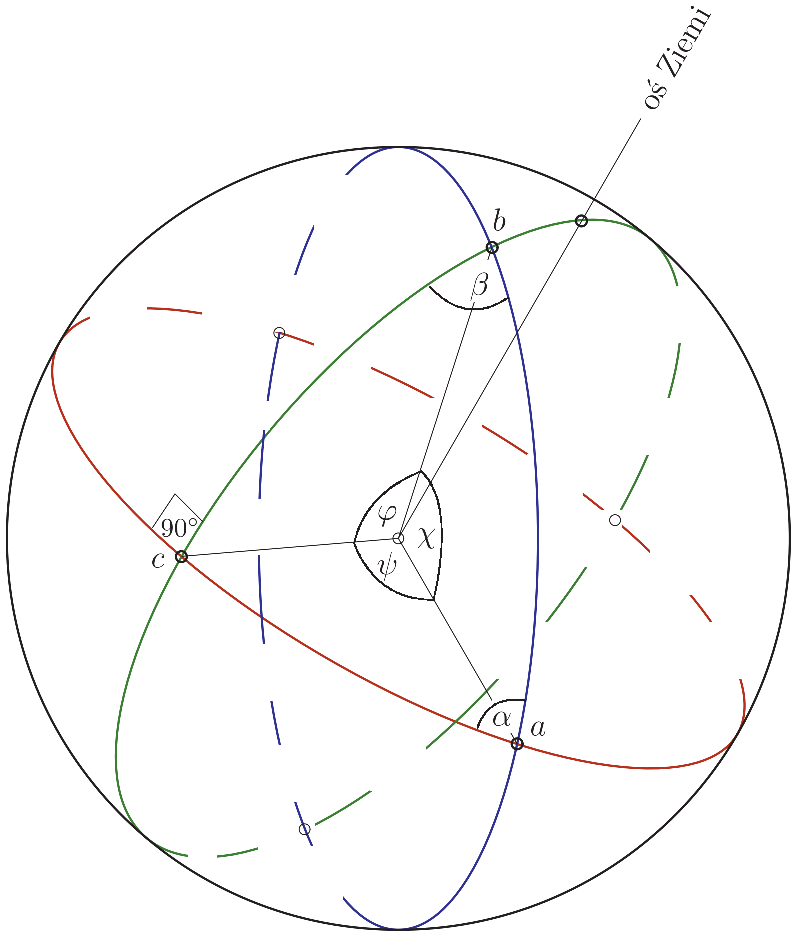
Kosmiczny punkt widzenia

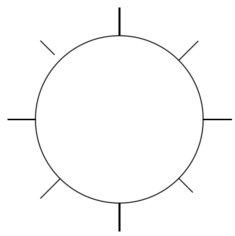
Punktem wyjścia jest obserwacja, że o wschodzie linia (okrąg wielki kuli ziemskiej) oddzielająca noc od dnia przechodzi przez obserwatora i jest prostopadła do kierunku ku Słońcu.

Bez dobrego rysunku ani dudu. A tą linię cienia oraz kierunek ku południowi potrafimy narysować zarówno na widnokręgu jak na kuli ziemskiej.

No to rysujmy.







Na powyższym rysunku zaznaczona jest oś Ziemi i czerwony[1] równik. Przez obserwatora b przeprowadzony jest zielony południk przecinający równik w punkcie c pod kątem prostym. Trzeci niebieski okrąg wielki to linia cienia przechodząca przez obserwatora i przecinająca równik w punkcie a.

W środku kuli ziemskiej zaznaczone są kąty wycinków kół wielkich:

- kąt φ, czyli szerokość geograficzna obserwatora, mierzona po zielonym południku między równikiem a obserwatorem;
- kąt ψ, czyli różnica długości geograficznych obserwatora i punktu przecięcia niebieskiej linii cienia z czerwonym równikiem;
- kąt χ między równikiem a obserwatorem mierzony po niebieskiej linii cienia.

Na powierzchni Ziemi zaznaczone są kąty między okręgami wielkimi:

- kąt α, czyli nachylenie osi ziemskiej do płaszczyzny ekliptyki;
- kąt β, czyli *poszukiwany* kąt między pomiędzy linią cienia a południkiem;
- Kąt prosty między czerwonym równikiem i zielonym południkiem.

[1] Jeśli oglądasz to na ekranie lub na kolorowym wydruku.

Zwróć uwagę, że $\varphi \leqslant \alpha$. Jeśli szerokość geograficzna obserwatora jest wyższa niż α, to jest on powyżej północnego koła polarnego w sferze wiecznego dnia. Wtedy żadna linia cienia nie może przez niego przechodzić.

Będziemy się interesować trójkątem sferycznym abc.

W(s)tręt o trygonometrii sferycznej

Wiedzę na ten temat można otrzymać wpisując do *Google*'a hasło

`spherical trigonometry`

Albo zaglądając wprost np. pod

`http://mathworld.wolfram.com/SphericalTrigonometry.html`

W skrócie: *trójkąt sferyczny* musi mieć jako boki wycinki okręgów wielkich. Trójkąty sferyczne spełniają zależności między kątami i bokami podobne do wzoru sinusów i wzoru cosinusów znanych ze zwykłej trygonometrii płaskiej.

Wzór sinusów jest całkiem podobny, tylko zamiast długości boków należy wziąć sinusy odpowiednich kątów ze środka Ziemi. Dla naszego trójkąta abc wzór sinusów orzeka, że

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin\chi} \tag{1}$$

Wzorów cosinusów jest kilka; jeden z nich ma następującą postać:

$$\cos\chi = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos 90^\circ \tag{2}$$

A co *my* z tego mamy?

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\begin{array}{ll} a \overset{\text{def}}{=} \sin^2\alpha & \qquad x \overset{\text{def}}{=} \sin^2\beta \\ b \overset{\text{def}}{=} \sin^2\varphi & \qquad y \overset{\text{def}}{=} \sin^2\psi \\ & \qquad z \overset{\text{def}}{=} \sin^2\chi \end{array}$$

Stałe a i b są znane; szukamy wartości x. Równości (1) i (2) to razem trzy równania z trzema niewiadomymi:

$$\begin{array}{l} a/b = x/y \\ a/b = 1/z \\ 1 - z = (1-b)\cdot(1-y) \end{array}$$

Stąd $z = b/a$ i $y = b\cdot x/a$. Więc

$$x = \frac{1-a}{1-b}$$

Stąd

$$\sin^2\beta = \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\sin^2\varphi}$$

czyli ostatecznie:

$$\boxed{\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}}$$

Żeby ten wzór miał sens i sinus był mniejszy niż 1, musi zachodzić $\cos\alpha \leqslant \cos\varphi$ czyli $\alpha \geqslant \varphi$. To jest zgodne z uwagą ze strony 3, że szerokość geograficzna nie może być zbyt duża.

Wzór wyszedł taki prosty, że aż podejrzany. Proszę Cię, sprawdź krytycznie wszystkie przekształcenia.

No, to liczymy

Suma nachylenia osi ziemskiej do ekliptyki i szerokości geograficznej zwrotnika Raka daje razem 90°; a więc, czyli $\alpha \simeq 90 - 23.5° = 66.5°$ (falka oznacza „mniej więcej równe"). Szerokość geograficzna Warszawy wynosi $\varphi \simeq 52.5°$. Wobec tego ostatecznie

$$\beta \simeq \arcsin\left(\frac{\cos 66.5°}{\cos 52.5°}\right) = 41°$$

I to by tyło na byle, jeśli tylko mój kalkulator się nie rąbnął.

Możesz ew. policzyć ponownie dla dokładniejszych wartości α i φ. Weź też pod uwagę, że ten kąt może się trochę zmieniać z powodu zjawisk w atmosferze. Na przykład czasem promienie światła uginają się tak, że można trochę „zajrzeć za horyzont". Wtedy *obserwowany* kąt β staje się większy.